$$\left.\begin{array}{l}
\text{(BIL)} \quad \bar{x} \cdot (\bar{y} + \lambda \bar{y}') = \bar{x} \cdot \bar{y} + \lambda\, \bar{x} \cdot \bar{y}' \\
\qquad (\bar{x} + \mu \bar{x}') \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \mu\, \bar{x}' \cdot \bar{y} \\
\text{(NORM)} \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = \|\bar{x}\|^2 \\
\text{(CS)} \quad |\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\| . \|\bar{y}\| \longleftarrow \text{inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
\forall\, \bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}
\end{array}\right.$$

(Preuve de (CS)) Pour $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$ :

$$0 \leq \|\bar{x} + t.\bar{y}\|^2 = (\bar{x} + t\bar{y}) \cdot (\bar{x} + t\bar{y})$$

$$\overset{\uparrow\,(\mathrm{BIL})}{=} \bar{x}\cdot\bar{x} + t\,\bar{y}\cdot\bar{x} + t\,\bar{x}\cdot\bar{y} + t^2\,\bar{y}\cdot\bar{y}$$

$$\overset{\uparrow\,(\mathrm{SYM})}{=} \bar{x}\cdot\bar{x} + 2t\,\bar{x}\cdot\bar{y} + t^2\,\bar{y}\cdot\bar{y}$$

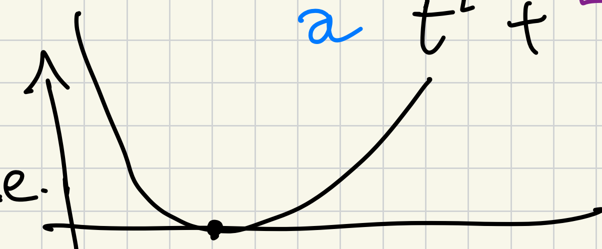
$$\overset{\uparrow\,(\mathrm{NORM})}{=} \underbrace{\|\bar{x}\|^2}_{\geq 0} + 2t\,\bar{x}\cdot\bar{y} + t^2\underbrace{\|\bar{y}\|^2}_{\geq 0}, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

i.e.

$$\underbrace{\|\bar{y}\|^2}_{a}\, t^2 + \underbrace{2\,\bar{x}\cdot\bar{y}}_{b}\, t + \underbrace{\|\bar{x}\|^2}_{c} \geq 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$a\,t^2 + b\,t + c \geq 0$$

i.e.



oo

$$\Rightarrow \quad b^2 - 4a.c \leq 0$$

i.e.

$$\underbrace{(2\,\bar{x}\cdot\bar{y})}_{b}^2 - 4\,\underbrace{\|\bar{y}\|^2}_{a}.\underbrace{\|\bar{x}\|^2}_{c} \leq 0$$

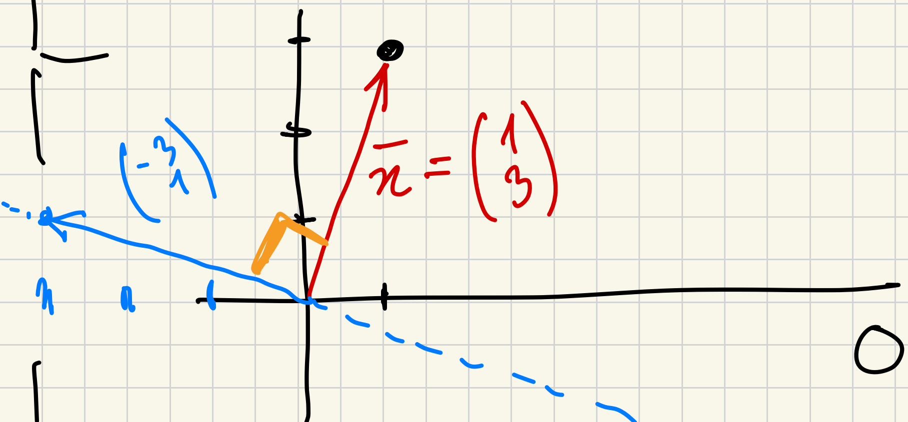
$$\Rightarrow \quad \cancel{4}(\bar{x}\cdot\bar{y})^2 \leq \cancel{4}\,\|\bar{x}\|^2.\|\bar{y}\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\bar{x}\cdot\bar{y}| \leq \|\bar{x}\|.\|\bar{y}\|$$

$\boxed{\text{Déf. 11.11}}$ On dit que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $\mathbb{R}^n$

sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si
$\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$

**EXM** Soit $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer tous les vecteurs $\bar{y}$ orthogonaux à $\bar{x}$.




$\begin{pmatrix} -t \\ t/3 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

$0 = \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= y_1 + 3y_2$$

$$\Rightarrow y_1 = -3y_2 \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} -3y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^2 : \bar{y} \cdot \bar{x} = 0 \right\}$

**Motivation** Soit $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de rang 2

J'aimerais résoudre

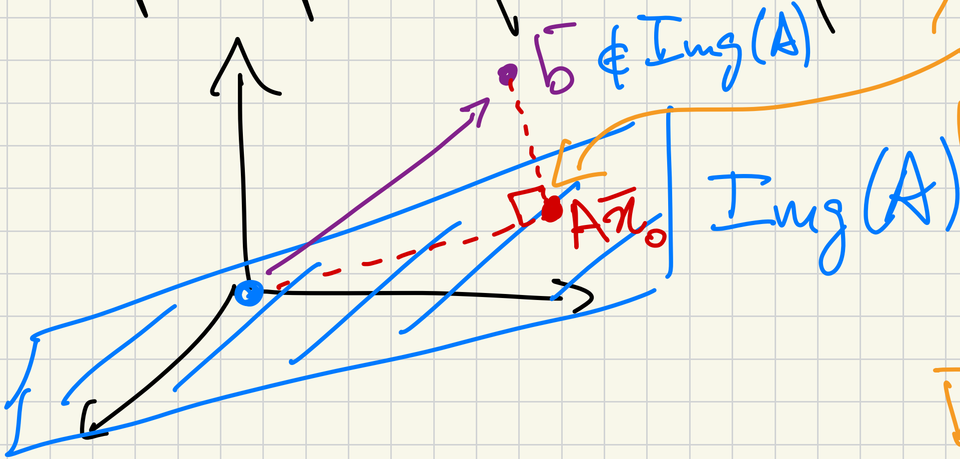
$$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad \text{avec } \underbrace{\bar{b} \notin \mathrm{Img}(A)}$$

⚠ Mais c'est un SEL incompatible 😐

Dans ce cas la meilleure possible stratégie serait de trouver $\bar{x}_0$ t.q.

$$\| A\cdot\bar{x}_0 - b \|$$

est le plus petit possible parmi tous les $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$




Ici l'orthogonalité apparaît !!!

$$\bar{b} - A\cdot\bar{x}_0 \perp \mathrm{Img}(A)$$

**Notation** : $\bar{x} \perp \bar{y} \equiv \bar{x}$ et $\bar{y}$ sont orthogonaux

$\boxed{\text{Lemme 11.13}}$ Pour $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ :

$\bar{x} \perp \bar{y}$ ssi $\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$

$\boxed{\text{Déf 11.14}}$ Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$. On définit le complément orthogonal de $W$ par

$$W^{\perp} := \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : \bar{v} \cdot \bar{w} = 0, \forall \bar{w} \in W\}$$

**Proposition 11.17** Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ :

(1) $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

(2) Si $W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $(W^\perp)^\perp = W$

(3) $\dim W + \dim W^\perp = n$ ← exercice de la série

(4) $W \cap W^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

**Comment calculer $W^\perp$ ?** (pour $W$ un sous-espace vectoriel)

① Calculer une base de $W$ :

$\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$

② $W^\perp = \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix}\bar{w}_1 \dots \bar{w}_k\end{bmatrix}^T\right)$

ça marche aussi si $\mathcal{B}$ est seulement famille génératrice

$\boxed{\text{EXM 11.20}}$ $W = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$

Calculer $W^\perp$.

c'est base de W

car c'est libre !!!

$$W^\perp = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{L_2}{5}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{FER}}$$

$x_1, x_2$ var liées $\longrightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$x_3$ libre

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\text{EXM1122}}$ Soit $W = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

base de W ?

Calculer $W^\perp$.

(une base de)

$\Downarrow$

$$W^\perp = \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{FER}}$$

$x_1, x_2$ var liées

$x_3, x_4$ var libres

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -x_4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

base de $W^\perp$ !!

$\boxed{\text{EXM}}$ $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

Calculer base de $W^\perp$.

Par déf $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \bullet \left( t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}$$

$$\Rightarrow W^{\perp} = \left( \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{\perp} \right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $W^{\perp}$.

**Déf. 11.23** | Soit $V$ un espace vectoriel.

Un produit scalaire (abstrait) est donner un nombre réel $\underbrace{(u \mid v) \in \mathbb{R}}$, pour tous

$u, v \in V$ tel que

↳ produit scalaire entre $u$ et $v$

(PS.1) $(u|v) = (v|u)$, $\forall u, v \in V$.

(PS.2) $(u + \lambda u' \mid v) = (u|v) + \lambda (u'|v)$

$(u \mid v + \mu v') = (u|v) + \mu (u|v')$

$\forall u, u', v, v' \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(PS.3) $(u|u) \geq 0$, $\forall u \in V$ et $(u|u) = 0$ ssi $u = 0_V$.

$\boxed{\text{REM}}$ Pour $V = \mathbb{R}^n$ et $(\bar{u} \mid \bar{v}) := \bar{u} \cdot \bar{v}$

on a un produit scalaire.

$\boxed{\text{EXM 11.26}}$ Pour $V = \mathbb{P}_2$ et

$$(p|q) := \sum_{i=0}^{2} p(i).q(i)$$

pour $p, q \in \mathbb{P}_2$, Montrer que c'est un produit scalaire.